

**Федеральное государственное автономное образовательное
учреждение высшего образования
«Московский физико-технический институт
(национальный исследовательский университет)»**

УТВЕРЖДЕНО

**Начальник
учебно-методического отдела
Т.Ф. Артеменко**

	Рабочая программа дисциплины (модуля)
по дисциплине:	Алгебра I
по направлению:	Математика
профиль подготовки:	Фундаментальная математика Высшая школа современной математики Высшая школа современной математики
курс:	1
квалификация:	бакалавр

Семестр, формы промежуточной аттестации: 1 (осенний) - Экзамен

Аудиторных часов: 90 всего, в том числе:

лекции: 30 час.

семинары: 60 час.

лабораторные занятия: 0 час.

Самостоятельная работа: 96 час.

Подготовка к экзамену: 30 час.

Всего часов: 216, всего зач. ед.: 6

Программу составили:

А.Н. Соболевский, д-р физ.-мат. наук

М.А. Цфасман, д-р физ.-мат. наук

Программа обсуждена на заседании Высшая школа современной математики 02.09.2024

Аннотация

Алгебра является одной из основных математических дисциплин, понятия и конструкции которой встречаются во всех разделах современной математики. Первая часть курса алгебры посвящена основным алгебраическим понятиям (группы, кольца, поля, модули, линейные операторы) и образует основу более детального изучения алгебраических структур в последующих семестрах.

1. Цели и задачи

Цель дисциплины

- формирование базовых знаний по алгебре для дальнейшего использования в других математических дисциплинах; формирование математической культуры, исследовательских навыков и способности применять знания на практике.

Задачи дисциплины

- приобретение слушателями теоретических знаний и практических умений и навыков в области изучения базовых алгебраических структур и линейных операторов;
- подготовка слушателей к изучению смежных математических дисциплин;
- приобретение навыков в применении алгебраических методов в других математических дисциплинах.

2. Перечень формируемых компетенций

Освоение дисциплины направлено на формирование следующих компетенций:

Код и наименование компетенции	Индикаторы достижения компетенции
УК-1 Способен осуществлять поиск, критический анализ и синтез информации, применять системный подход для решения поставленных задач	УК-1.1 Анализирует задачу, выделяя этапы ее решения, действия по решению задачи
	УК-1.2 Находит, критически анализирует и выбирает информацию, необходимую для решения поставленной задачи
	УК-1.3 Рассматривает различные варианты решения задачи, оценивает их преимущества и недостатки
	УК-1.4 Грамотно, логично, аргументированно формирует собственные суждения и оценки
ОПК-1 Способен применять фундаментальные знания, полученные в области математических и (или) естественных наук, и использовать их в профессиональной деятельности	ОПК-1.1 Способен анализировать поставленную задачу, намечать пути ее решения
	ОПК-1.2 Способен строить математические модели, производить количественные расчеты и оценки
	ОПК-1.3 Способен определять границы применимости полученных результатов
ОПК-3 Способен использовать в педагогической деятельности научные знания в сфере математики и информатики	ОПК-3.1 Знает основные правила оформления научных публикаций и научно-технической документации, в том числе с использованием прикладного программного обеспечения
	ОПК-3.2 Владеет на практике методологией составления научно-технических отчетов (проектов)
	ОПК-3.3 Владеет методами визуального и графического представления результатов научной (научно-технической, инновационной технологической) деятельности в виде отчетов, научных публикаций
ПК-1 Способен ставить, формализовывать и решать задачи, в том числе разрабатывать и исследовать математические модели изучаемых явлений и процессов, системно анализировать научные проблемы, получать	ПК-1.1 Способен находить, анализировать и обобщать информацию об актуальных результатах исследований в рамках тематической области своей профессиональной деятельности
	ПК-1.2 Способен выдвигать гипотезы, строить математические модели для описания изучаемых явлений и процессов, оценивать качество разработанной модели

новые научные результаты	ПК-1.3 Способен применять теоретические и (или) экспериментальные методы исследований к конкретной научной задаче и интерпретировать полученные результаты
ПК-3 Способен проверять корректность математического доказательства, строить логически последовательные цепочки рассуждений	ПК-3.1 Способен к формальной записи рассуждения в терминах логики предикатов
	ПК-3.2 Владеет понятием о математически строгом доказательстве, способен различать строгие и нестрогие рассуждения
	ПК-3.3 Способен выявлять использованные при доказательстве предположения и предпосылки, в том числе неявные, и контролировать их корректность

3. Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине (модулю)

В результате освоения дисциплины обучающиеся должны

знать:

Определения и классификацию основных алгебраических структур: групп, колец, полей, модулей.

Определение и классификацию линейных операторов в векторном пространстве над полем.

Основные теоретические факты: теорему Гильберта о базисе, теорему Гамильтона-Кэли

уметь:

Разбирать конкретные примеры и проводить необходимые вычисления.

владеть:

Свободно владеть техническим инструментарием, необходимым для самостоятельных вычислений с основными алгебраическими структурами.

4. Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам (разделам) с указанием отведенного на них количества академических часов и видов учебных занятий

4.1. Разделы дисциплины (модуля) и трудоемкости по видам учебных занятий

№	Тема (раздел) дисциплины	Трудоемкость по видам учебных занятий, включая самостоятельную работу, час.			
		Лекции	Семинары	Лаборат. работы	Самост. работа
1	Основные алгебраические структуры	2	4		4
2	Примеры алгебраических структур	2	4		4
3	Основные теоремы арифметики и алгебры	2	4		4
4	Идеалы	2	4		6
5	Кольца идеалов	2	4		6
6	Теорема Гильберта о базисе	2	4		6
7	Модули над кольцами	2	4		6
8	Модули над полями	2	4		6
9	Линейные операторы	2	4		6
10	Полилинейные формы	2	4		8
11	Классификации модулей и групп	2	4		8
12	Классификация линейных операторов	2	4		8
13	Спектральная задача для линейных операторов	2	4		8
14	Разложение Жордана	2	4		8
15	Теорема Гамильтона-Кэли	2	4		8
Итого часов		30	60		96

Подготовка к экзамену	30 час.
Общая трудоёмкость	216 час., 6 зач.ед.

4.2. Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам (разделам)

Семестр: 1 (Осенний)

1. Основные алгебраические структуры

Абелевы группы, кольца, поля. Гомоморфизмы.

2. Примеры алгебраических структур

Целые, рациональные, действительные, комплексные числа. Многочлены, рациональные функции, формальные степенные ряды. Кольца и поля вычетов. Конечные поля.

3. Основные теоремы арифметики и алгебры

Основная теорема арифметики. Основная теорема алгебры. Китайская теорема об остатках.

4. Идеалы

Главные и конечно-порожденные идеалы. Простые и максимальные идеалы.

5. Кольца идеалов

Кольца главных идеалов, нетеровы и факториальные кольца.

6. Теорема Гильберта о базисе

Нетеровость кольца многочленов над нетеровым кольцом. Доказательство теоремы Гильберта.

7. Модули над кольцами

Фактор-модули, свободные модули, гомоморфизмы модулей, образующие и соотношения.

8. Модули над полями

Векторные пространства. Линейные отображения.

9. Линейные операторы

Матрицы линейных операторов в разных базисах. Двойственное пространство. Алгебры.

10. Полилинейные формы

Полилинейные формы, определители. Правило Крамера. Грассмановы многочлены.

11. Классификации модулей и групп

Классификация конечно-порожденных модулей над кольцами главных идеалов. Классификация конечно-порожденных абелевых групп.

12. Классификация линейных операторов

Классификация линейных операторов. Жорданова и фробениусова нормальные формы.

13. Спектральная задача для линейных операторов

Собственные значения и собственные подпространства. Характеристический и минимальный многочлены.

14. Разложение Жордана

Нильпотентные и полупростые операторы. Циклические векторы. Разложение Жордана. Функции от оператора.

15. Теорема Гамильтона-Кэли

Многочлены над матрицами. Формулировка и доказательство теоремы Гамильтона-Кэли.

5. Описание материально-технической базы, необходимой для осуществления образовательного процесса по дисциплине (модулю)

Учебная аудитория, оснащенная мультимедиа проектором, экраном и микрофоном.

6.Перечень рекомендуемой литературы

Основная литература

1. Курс алгебры, [учебник для вузов] / Э. Б. Винберг, Москва, МЦНМО, 2019

Программа подготовлена для лицензирования направления подготовки, выдача литературы не требуется

Дополнительная литература

1. Основы алгебры / Е. Е. Тыртышников. – Москва: Физматлит, 2020. – Электронная копия доступна на сайте электронно-библиотечной системы
2. Алгебра [Текст] : [учеб. пособие для вузов] / С. Ленг ; пер. с англ. Е. С. Голда ; под ред. А. И. Кострикина. — М. : Мир, 1968. — 564 с.
3. Алгебра [Текст] / И. М. Гельфанд, А. Шень - М.МЦНМО,2009

Программа подготовлена для лицензирования направления подготовки, выдача литературы не требуется

7. Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети "Интернет", необходимых для освоения дисциплины (модуля)

<https://old.mccme.ru/iu/courses.php>

<https://library.mccme.ru/>

8. Перечень информационных технологий, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине (модулю), включая перечень необходимого программного обеспечения и информационных справочных систем (при необходимости)

На лекционных и практических (семинарских) занятиях могут использоваться мультимедийные технологии, включая демонстрацию презентаций, а также технологии дистанционной аудиовидеоконференцсвязи.

9. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины (модуля)

Методические указания приводятся в разрабатываемых аудиторных и домашних раздаточных материалах (листочках).

ПРИЛОЖЕНИЕ

ОЦЕНОЧНЫЕ МАТЕРИАЛЫ ПО ДИСЦИПЛИНЕ (МОДУЛЮ)

по направлению:	Математика
профиль подготовки:	Фундаментальная математика Высшая школа современной математики Высшая школа современной математики
курс:	<u>1</u>
квалификация:	бакалавр

Семестр, формы промежуточной аттестации: 1 (осенний) - Экзамен

Разработчики:

А.Н. Соболевский, д-р физ.-мат. наук

М.А. Цфасман, д-р физ.-мат. наук

1. Компетенции, формируемые в процессе изучения дисциплины

Код и наименование компетенции	Индикаторы достижения компетенции
УК-1 Способен осуществлять поиск, критический анализ и синтез информации, применять системный подход для решения поставленных задач	УК-1.1 Анализирует задачу, выделяя этапы ее решения, действия по решению задачи
	УК-1.2 Находит, критически анализирует и выбирает информацию, необходимую для решения поставленной задачи
	УК-1.3 Рассматривает различные варианты решения задачи, оценивает их преимущества и недостатки
	УК-1.4 Грамотно, логично, аргументированно формирует собственные суждения и оценки
ОПК-1 Способен применять фундаментальные знания, полученные в области математических и (или) естественных наук, и использовать их в профессиональной деятельности	ОПК-1.1 Способен анализировать поставленную задачу, намечать пути ее решения
	ОПК-1.2 Способен строить математические модели, производить количественные расчеты и оценки
	ОПК-1.3 Способен определять границы применимости полученных результатов
ОПК-3 Способен использовать в педагогической деятельности научные знания в сфере математики и информатики	ОПК-3.1 Знает основные правила оформления научных публикаций и научно-технической документации, в том числе с использованием прикладного программного обеспечения
	ОПК-3.2 Владеет на практике методологией составления научно-технических отчетов (проектов)
	ОПК-3.3 Владеет методами визуального и графического представления результатов научной (научно-технической, инновационной технологической) деятельности в виде отчетов, научных публикаций
ПК-1 Способен ставить, формализовывать и решать задачи, в том числе разрабатывать и исследовать математические модели изучаемых явлений и процессов, системно анализировать научные проблемы, получать новые научные результаты	ПК-1.1 Способен находить, анализировать и обобщать информацию об актуальных результатах исследований в рамках тематической области своей профессиональной деятельности
	ПК-1.2 Способен выдвигать гипотезы, строить математические модели для описания изучаемых явлений и процессов, оценивать качество разработанной модели
	ПК-1.3 Способен применять теоретические и (или) экспериментальные методы исследований к конкретной научной задаче и интерпретировать полученные результаты
ПК-3 Способен проверять корректность математического доказательства, строить логически последовательные цепочки рассуждений	ПК-3.1 Способен к формальной записи рассуждения в терминах логики предикатов
	ПК-3.2 Владеет понятием о математически строгом доказательстве, способен различать строгие и нестрогие рассуждения
	ПК-3.3 Способен выявлять использованные при доказательстве предположения и предпосылки, в том числе неявные, и контролировать их корректность

2. Показатели оценивания компетенций

В результате изучения дисциплины «Алгебра I» обучающийся должен:

знать:

Определения и классификацию основных алгебраических структур: групп, колец, полей, модулей.

Определение и классификацию линейных операторов в векторном пространстве над полем.

Основные теоретические факты: теорему Гильберта о базисе, теорему Гамильтона-Кэли

уметь:

Разбирать конкретные примеры и проводить необходимые вычисления.

владеть:

Свободно владеть техническим инструментарием, необходимым для самостоятельных вычислений с основными алгебраическими структурами.

3. Перечень типовых (примерных) вопросов, заданий, тем для подготовки к текущему контролю

С целью контроля освоения обучающимися учебного материала проводится устный опрос в начале занятия по материалу предыдущего занятия.

4. Перечень типовых (примерных) вопросов и тем для проведения промежуточной аттестации обучающихся

1. Абелевы группы, кольца, поля. Гомоморфизмы
2. Примеры алгебраических структур: целые, рациональные, действительные, комплексные числа. Многочлены, рациональные функции, формальные степенные ряды. Кольца и поля вычетов. Конечные поля
3. Основная теорема арифметики. Основная теорема алгебры. Китайская теорема об остатках
4. Идеалы: главные и конечно-порожденные. Простые и максимальные идеалы
5. Кольца главных идеалов, нетеровы и факториальные кольца
6. Теорема Гильберта о базисе
7. Модули над кольцами. Фактор-модули, свободные модули, гомоморфизмы модулей, образующие и соотношения
8. Модули над полями: векторные пространства. Линейные отображения
9. Матрицы линейных операторов в разных базисах. Двойственное пространство. Алгебры
10. Полилинейные формы, определители. Правило Крамера. Грассмановы многочлены
11. Классификация конечно-порожденных модулей над кольцами главных идеалов. Классификация конечно-порожденных абелевых групп
12. Классификация линейных операторов. Жорданова и фробениусова нормальные формы
13. Собственные значения и собственные подпространства. Характеристический и минимальный многочлены
14. Нильпотентные и полупростые операторы. Циклические векторы. Разложение Жордана. Функции от оператора
15. Теорема Гамильтона-Кэли

Пример экзаменационного билета:

1. Жорданова нормальная форма линейного оператора.
2. Кольцо. Определение и примеры колец

Критерии оценивания

- оценка «отлично (10)» выставляется студенту, показавшему всесторонние, систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины и умение уверенно применять их на практике при решении конкретных задач, свободное и правильное обоснование принятых решений;
- оценка «отлично (9)» выставляется студенту, показавшему всесторонние, систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины и умение применять их на практике при решении конкретных задач, свободное и правильное обоснование принятых решений;
- оценка «отлично (8)» выставляется студенту, показавшему всесторонние, систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины и умение применять их на практике при решении конкретных задач, и правильное обоснование принятых решений;

- оценка «хорошо (7)» выставляется студенту, если он твердо знает материал, грамотно и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но допускает в ответе или в решении задач некоторые неточности;
- оценка «хорошо (6)» выставляется студенту, если он знает материал, грамотно и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но допускает в ответе или в решении задач некоторые неточности;
- оценка «хорошо (5)» выставляется студенту, если он знает материал, и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но допускает в ответе или в решении задач некоторые неточности;
- оценка «удовлетворительно (4)» выставляется студенту, показавшему фрагментарный, разрозненный характер знаний, недостаточно правильные формулировки базовых понятий, нарушения логической последовательности в изложении программного материала, но при этом он владеет основными разделами учебной программы, необходимыми для дальнейшего обучения и может применять полученные знания по образцу в стандартной ситуации;
- оценка «удовлетворительно (3)» выставляется студенту, показавшему фрагментарный, разрозненный характер знаний, недостаточно правильные формулировки базовых понятий, нарушения логической последовательности в изложении программного материала, но при этом он владеет фрагментарно основными разделами учебной программы, необходимыми для дальнейшего обучения и может применять полученные знания по образцу в стандартной ситуации;
- оценка «неудовлетворительно (2)» выставляется студенту, который не знает большей части основного содержания учебной программы дисциплины, допускает грубые ошибки в формулировках основных понятий дисциплины и не умеет использовать полученные знания при решении типовых практических задач;
- оценка «неудовлетворительно (1)» выставляется студенту, который не знает формулировок основных понятий дисциплины.

5. Методические материалы, определяющие процедуры оценивания знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности

При проведении устного экзамена обучающемуся предоставляется 40 минут на подготовку. Опрос обучающегося по билету на устном экзамене не может продолжаться более двух астрономических часов.

Во время проведения экзамена и зачета обучающимся запрещается пользоваться помощью других лиц и мобильными телефонами, разрешается пользоваться программой учебной дисциплины и справочной литературой по выбору экзаменатора.